面積保存２次元写像で位相的エントロピーを求める方法

山口喜博 (帝京平成大学：170-8445 東京都豊島区東池袋 2-51-4)
メールアドレス：chaosfractal@mac.com
谷川清隆 (国立天文台：181-8588 東京都三鷹市大沢 2-21-1)
メールアドレス：tanikawa.ky@nao.ac.jp

A Method to calculate topological entropy in area–preserving two–dimensional maps

Y.Yamaguchi (Teikyo Heisei University)
K.Tanikawa (National Astronomical Observatory)

Abstract:The two methods named the trellis method and the braid method to calculate topological entropy in the area–preserving two–dimensional maps are introduced. The existence of the non–Birkhoff periodic orbits forced by the *trellis* $\mathcal{T}$ is proved. Applying the braid method for the braid types of these non–Birkhoff periodic orbits forced by the trellis, we calculate a lower found for topological entropy at the situation where $\mathcal{T}$ exists but the trellis method can not be applicable.

Keywords:Area–preserving two dimensional map, topological entropy, non–Birkhoff periodic orbit, trellis and braid.

面積保存２次元写像において位相的エントロピー（正確には位相的エントロピーの下界）を求める方法は２つある．一つは安定多様体と不安定多様体の弧で構成される「トレリス」を利用する方法でトレリス法と呼ばれる [1]．もう一つの方法はノンバーコフ周期軌道の「組みひも」を利用する [2]．この方法を組みひも法と呼ぶ．次に例をもとにどのような場合に適用できるか説明する．

例として標準写像を考える．不動点の安定多様体と不安定多様体はあるパラメータ以上では３つ折れ馬蹄を構成する．３つ折れ馬蹄が完成するまでの過程でトレリスを構成し位相的エントロピーを求める事ができる．このときこの馬蹄にある周期軌道ならびにカオス軌道は楕円型不動点の周りを回ることに注意しよう．

回転数が有限であるノンバーコフ周期軌道がサドルノード分岐で生じる．これらの軌道は円筒面を回る運動である．ノンバーコフ周期軌道の軌道の構造より組みひもを作る事ができる．得られた組みひもに対して Burau 行列法 [2] またはトレイントラック法 [3] を用いて位相的エントロピーが計算できる．

トレリス法と組みひも法は適用できる対象が異なっていることが分かる．コンピュータグラフィックスを利用すると安定多様体と不安定多様体の図を簡単に描ける．しかし, 描いた安定多様体と不安定多様体の構造に対してトレリス法が利用できない場合がある．このような場合にでも, 安定多様体と不安定多様体の構造 (トレリス) をもとにある種のノンバーコフ周期軌道の存在が示せれば組みひも法を利用して位相的エントロピーが計算できる．以下で我々の手法をまとめる．

手順１: 安定多様体と不安定多様体の接触状況 (トレリス) を構成する．
手順２: トレリスを利用してある種のノンバーコフ周期軌道が存在することを示す．
手順３: ノンバーコフ周期軌道の軌道点の順序構造より組みひもを構成する．
手順４: 組みひもに対して Burau 行列法 ([4] にプログラムを載せてある), またはトレイントラック法を装備した T.Hall のソフトウェアー Trains3 を利用して位相的エントロピーの下界を計算する．Trains3 は T.Hall のホームページ [5] よりダウンロードできる．

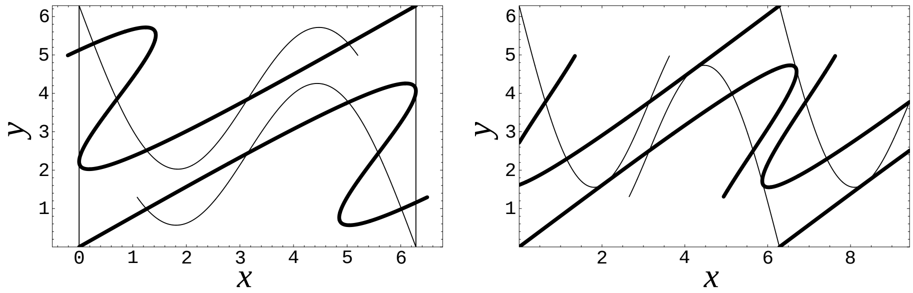

図 1: 図では不安定多様体を太い線で描き, 安定多様体は細い線で描いた. 左の図が例 1: $a = 2.920$. $(0, 0)$ のサドルの不安定多様体が対称線 $x = 2\pi$ と接触している状況. 右の図が例 2: $a = 3.368$. $(0, 0)$ のサドルの不安定多様体が $(2\pi, 2\pi)$ のサドルの安定多様体とヘテロクリニック接触している状況.

標準写像 $(y_{n+1} = y_n + a \sin x_n,\ x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \pmod{2\pi})$ を利用した例を紹介する.
例 1: 不安定多様体が対称線 $x = 2\pi$ と接触し, 安定多様体が対称線 $x = 0$ と接触している状況 (図 1 の左). ここで p/q は $0 < p/q < 1/2$ を満たす既約分数とする. この状況で回転数 $\frac{p+1}{q+2} = \frac{p}{q} \oplus \frac{1}{2}$ をもつノンバーコフ周期軌道が存在することが示せる. 大きなエントロピーを得るためには p/q はなるべく小さい値がよい. よって $p = 1$ とする. また q が奇数である場合が組みひもを構成しやすい. よって $q = 2k + 1$ $(k \geq 1)$ とし k を大きくする. $k \geq 2$ に対して Burau 行列法より特性方程式 $(\lambda + 2)(\lambda^{2k} + 1) = 3$ が得られる. $k \to \infty$ では, 固有値の絶対値の最大値は 2 に漸近していることが分かる. これより位相的エントロピーは $\ln 2$ 以上である. これは我々が既に得ていた結果と一致する [4]. 組みひも型の表現は複雑であることより, ここでは省略した.
例 2:図 1 の右の状況を考える. ここで $p/q, p'/q'$ は $0 < p/q < p'/q' < 1$ を満たす既約分数とする. この状況で回転数 $\frac{p+p'}{q+q'} = \frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'}$ をもつノンバーコフ周期軌道が存在することが示せる. $q' = 2k,\ p' = 2k - 1,\ q = 2k + 1,\ p = 1$ として, 例 1 と同様に k を大きくして固有値の絶対値の最大値を求める. 特性方程式は非常に複雑である. 特性方程式の項で最も発散の強い項つまり λ^{4k} を含む項のみを取り出す. λ^{4k} の係数を次に示す.

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda - 1)/(\lambda^2 - 1)^2.$$

$k \to \infty$ では上記の係数がゼロに収束する必要があることより, 固有値の絶対値の最大値が $\sqrt{2} + 1$ に収束することが分かる. 実際の収束の様子を下記に示す.

k	3	4	5	6	7	8
$\lambda_{\max}$	2.4016	2.4121	2.4138	2.4141	2.41420	2.41421

よってヘテロクリニック接触状況における位相的エントロピーは $\ln(\sqrt{2} + 1)$ 以上である.

[1] P. Collins, Int. J. Bifurcation and Chaos, 12 (2002), 605-617.
[2] 松岡隆, 物性研究 67-1 (1996), 1-56.
[3] M. Bestvina and M. Handel, Ann. Math. 135 (1992), 1-51.
[4] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, Prog. Theor. Phys. 107 (2002), 1117-1145.
[5] `http://www.liv.ac.uk/maths/PURE/MIN_SET/CONTENT/members/T_Hall.html`

記：2008 年 9 月 1 日