

# 和算『容術新題』に現れる円および三角形の特徴

The Characteristics of Circles and Triangles in the Native Mathematics in Japan,  
YOUJUTSUSHINDAI.

寺島 幸生  
TERASHIMA Yukio

鳴門教育大学大学院  
Graduate School, Naruto University of Education  
〒 772-8502 徳島県鳴門市鳴門町高島字中島 748  
748 Nakashima, Takashima Naruto-cho, Naruto, 772-8502  
e0738404@naruto-u.ac.jp

## Abstract

The circles and right triangles which appears in a book containing a collection of native mathematics in Japan “ YOUJUTSUSHINDAI ” were classified in terms of the radius of circles and the ratio of three sides of right triangles. Most of the circles have a unique radius, which is described by a simple integer, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 16 and 20, if the side length of the square in which the circles are enclosed is 16. Among these circles, the circles whose radii are 1, 4, 9 and 16 (i.e. the squares of 1, 2, 3 and 4) are relatively more than the others. The almost problems can be solved by using the sets of Pythagorean triangles. In particular, the Pythagorean triangles whose sides are in the ratio 3:4:5 usually appear in the problems of “ YOUJUTSUSHINDAI ”.

## Keywords

YOUJUTSUSHINDAI, the native mathematics in Japan, Pythagorean triangle

## 1 はじめに

和算には、円を取り扱う幾何学の問題が多くみられ、明治初期に鈴木円によって編纂された『容術新題』はそのひとつである。『容術新題』は、正方形の中に描かれた円や円弧の中で、最も小さな円（小円）の半径が、正方形の一辺の  $\frac{1}{16}$  になることを示す平面幾何の問題 100 題で構成されている。Figure 1, Figure 2, Figure 3 に其一、其六、其八十五の問題を示す。これまで、三平方の定理のみを用いた解法例 [1] のほかに、三角関数や比例関係を用いた解法例がいくつか報告されているが [2, 3, 4]、森田の報告は、多くの仮定を必要とするものの、ほぼ全ての問題についての解法例を与えている [5]。本報告では、これらの解法にもとづいて、問題を構成する円および円弧、解法に用いる直角三角形を分類、整理し、『容術新題』に現れる円や三角形の特徴について考察する。

## 2 問題を構成する円および円弧の特徴

解法から小円の半径だけでなく、全ての円および円弧（以後、円 / 弧と記す）の半径が求められる。正方形の一辺を 16 とすると、其一は、半径 1 の小円に加えて、半径が 9, 16 の 2 種類の円弧が存在する。其六では、小円以外に大円と円弧があり、それぞれの半径は 4, 16 である。また、其八十五では、小円以外の円 / 弧は存在しないが、等方（正方形）の一辺は 4 である。全 100 問について、半径の異なる各円 / 弧の総数と出現する問題数を集計した結果を Table 1 に示す。円 / 弧は、合計 15 種類存在するが、それらの半径は全て有理数で表される。正方形の一辺を 16 とすると、整数の半径をもつ円が 11 種類あり、半径が分数となる 4 種類を除いて、多くの円の半径が簡単な整数比で表されることが分かる。半径 1 の小円は、全ての問題で用いられ、その数は他と比べて圧倒的に多い。半径の大きな円 / 弧は少ない傾向があるが、2, 3, 4 の平方の半径を持つ円は例外的に多い。一方、1 から 16 までの整数で、半径が 7, 11, 12, 13, 14, 15 の円 / 弧は全く現れない。

### 3 解法に用いる三角形の特徴

問題を構成する円/弧の半径から，解法に用いた直角三角形の各辺の長さおよび比を求めた。其一，其六，其八十五における直角三角形の3辺の比は， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  では  $3:4:5, \beta$  は  $8:15:17, \Delta_{irr}$  は  $1:7:5\sqrt{2}$  である。各直角三角形を相似形別に分類し，その個数と出現する問題数を集計した結果を Table 2 に示す。3辺の比がすべて整数で表される直角三角形（ピタゴラス三角形）は， $3:4:5, 8:15:17, 5:12:13, 7:24:25$  の4種類存在する。中でも， $3:4:5$  のピタゴラス三角形は，個数および相似形の種類が他と比べて圧倒的に多く，大半の問題で用いられている。円/弧の半径がすべて有理数で表されるのに対し， $1:7:5\sqrt{2}$  のように，無理数を3辺の比に含む直角三角形が19種類存在する。これらの三角形は，三平方の定理だけでは解くことができず，三角関数や比例関係を用いる問題で現れる場合が多い。一方，三平方の定理のみを利用する問題では，3辺の比に無理数を含む直角三角形はほとんど現れず，ピタゴラス三角形のみを用いて解けるものが多い。

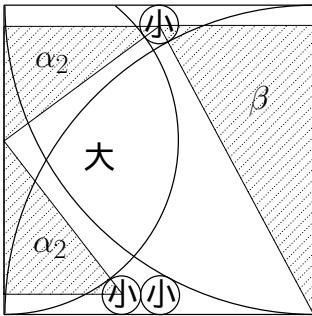


Figure 1: Problem No.1

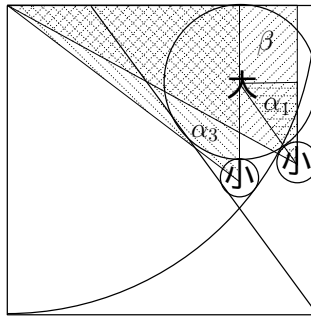


Figure 2: Problem No.6

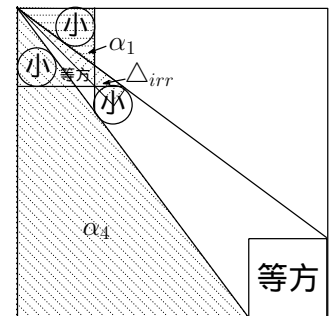


Figure 3: Problem No.85

Table 1: The comparison of the number of each circle/arc.

Radius	1	2	3	4	5	6	8	9	10	16	20	4/3	8/3	20/3	13/4
Total number	482	42	23	84	10	6	9	20	3	16	4	32	54	2	1
Problems	100	15	9	43	4	4	7	14	1	11	2	6	21	1	1

Table 2: The comparison of the number of each right triangle.

Ratio of 3 sides	3:4:5	8:15:17	5:12:13	7:24:25	irrational(19)
Total number	130	11	2	1	42
Series of similar types	16	2	1	1	1-5
Problems	86	11	2	1	33

### References

- [1] 寺島幸生；形の科学会誌，23，(2008)，57-58（シンポジウム要旨）
- [2] 深川英俊, ダン・ペドー；『日本の幾何 - 何題解けますか？』（森北出版，1991），168-174
- [3] 直井功；『教育科学 数学教育, No.564』（明治図書出版，2004），9-13
- [4] 村岡真由美；『学校数学研究』13 卷 1 号（鳴門教育大学学校数学研究会，2005），17-21
- [5] 森田芳雄；『幾何の不思議な世界 容術新題の研究』（明玄書房，1993）