

少数個の点による球面上の最適配置について

Optimal Configurations on the Sphere for Small Number of Points

種村 正美

Masaharu Tanemura

統計数理研究所, 〒106-8569 東京都港区南麻布 4-6-7, tanemura@ism.ac.jp

The Institute of Statistical Mathematics,
4-6-7 Minami-Azabu, Minato-ku, Tokyo 106-8569, Japan

概要

Evenly distributed configurations of points on the sphere are given for small number of points ($12 \leq N \leq 50$). Comparison of the configurations with those derived under the minimum Coulomb energy is discussed.

Keywords

Coulomb Energy, Fullerenes, Radiolarians, Spherical Adjustment Method, Voronoi Tessellation

1 はじめに

自然界では、とくに微視的レベルにおいて、しばしば球面上の美しいネットワーク構造が見られる。海中に生息する放散虫 (radiolarian) の骨格や、炭素分子 C_{60} に代表されるフラレンがその典型例である。それらは通常、同程度の大きさの 5, 6, 7 角形からできている。

そのような球面ネットワーク構造の数学的モデルを構成するためには、球面上に配置された点に対する Voronoi 分割が有効である。われわれは以前、Voronoi 分割を利用した「球面調節法」を提示し [2], [3]、点の個数 N が少数の場合は大局的最適配置が得られることを $N = 12, 14, 15, 16, 20, 32$ および 40 の場合に報告して、大きい N ($N = 200, 500, 1000$ など) に対しては多くの場合、局所的最適配置が得られることを示した [3]。また放散虫の骨格の 2 例 (それぞれ $N = 272$ および $N = 620$ に対応) について、球面調節法で得られた球面ネットワークと良く一致することを示した [2]。

今回の報告では、 $12 \leq N \leq 50$ のすべての N に対して球面調節法を適用して得られた結果を提示し、

最小 Coulomb エネルギー法による最適配置 [1] との比較を行う。

2 球面調節法と最小 Coulomb エネルギー法

時刻 t ($t = 0, 1, 2, \dots$) における単位球面上の N 個の点の座標を $X(t) \equiv \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\}$ として $X(t)$ の Voronoi 分割を行う。球面調節法の要点は、次の時刻の配置 $X(t+1)$ が、すべての点の位置がそれぞれの Voronoi セルの“中心”に移動することで定まるというメカニズムであり、ある $X(0)$ から出発して十分大きな T における配置 $X(T)$ は互いに均等にばらまかれた点配置となることが期待される (詳細は [2],[3] 参照)。図 1 は計算機実験で得られた大局的最適配置の例である ($X(0)$ はランダム配置)。

一方、Erber-Hockney [1] は同符号の等価な電荷を帯びた点が球面上に配置するとして、全 Coulomb エネルギーを最小にする配置を $2 \leq N \leq 65$ に対して計算機実験によって求めている。講演では二つの方法に対する最適配置の比較を行う。

参考文献

- [1] Erber, T. and Hockney, G.M. (1991). Equilibrium configurations of N equal charges on a sphere. *J. Phys. A*, **24**, L1369–L1377.
- [2] Tanemura, M. (1998). Random packing and tessellation network on the sphere. *Forma*, **13**, 99–121.
- [3] 種村正美 (1998). 球面上の最適配置の問題. 統計数理 **46**, 359–391.

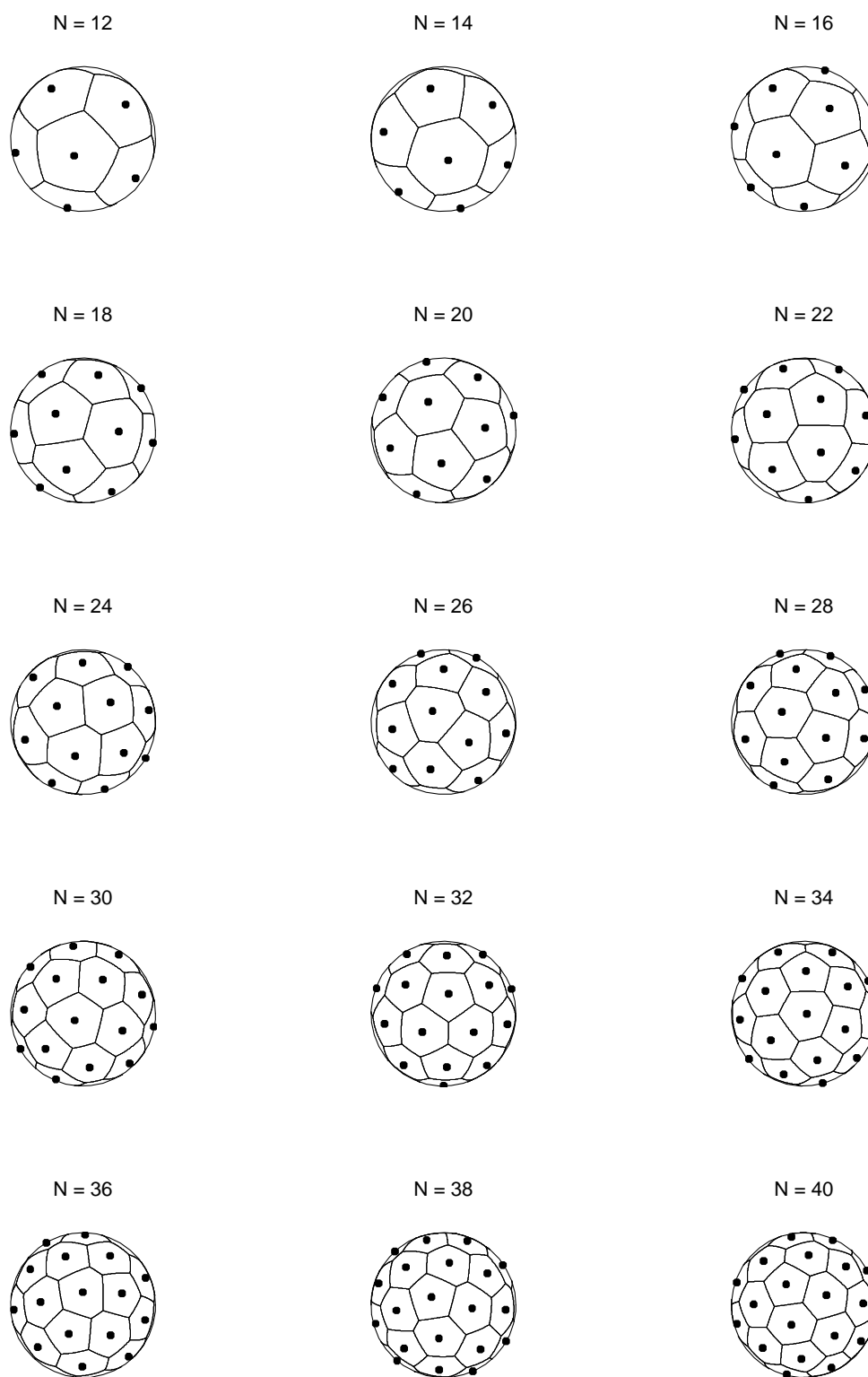


図 1: 球面調節法で得られた安定な点配置と Voronoi 分割 ($12 \leq N \leq 40$).