

Watts-Strogatz モデルにおける遷移確率行列の固有値統計

Spectra Statistics of the transition matrices of Watts-Strogatz model

高口太朗, 宮崎修次
Taro Takaguchi, Syuji Miyazaki

〒 606-8501 京都市左京区吉田本町 京都大学 情報学研究科
Graduate School of Informatics, Kyoto University, 606-8501, Kyoto

Abstract

We study the spectral properties of the transition matrix of the small-world network model by Watts and Strogatz and how those properties are relevant to the constitution of networks. We confirm that the distribution of the nearest neighbor eigenvalue spacings changes from Poisson distribution to Wigner one with the probability of rewiring p . Additionally, we find that the spacing between the largest and the second largest eigenvalue is proportional to p in small world state. This fact corresponds to the characteristic time scale of the correlation function of diffusion process on network.

Keywords

transition matrix, spectrum, small-world network

ネットワーク上でのランダムウォークは, 遷移確率行列によって特徴づけられる^{1,2)}. ここで対象とするネットワークはすべて無向ネットワークとし, あるノードから遷移する確率はそのノードに隣接するノード全てについて等確率であるとする. N 個のノードからなるネットワークに関し, H の N 個の固有値を実部の大きい順に $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N$ と表す. 特に最大固有値 ν_1 は常に 1 に等しいことが知られ, 対応する固有ベクトルは各ノードの定常滞在確率となる. 今回のように無向ネットワークかつ遷移確率が全隣接ノードについて等確率な場合は, 遷移確率行列の固有値はすべて実数となる. そこで, 最近接固

有値間隔を $\Delta\nu_{i,i+1} \equiv \nu_i - \nu_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) と定義する.

まず, ノード数 $N = 1000$, 平均次数 $k = 10$ とした Watts-Strogatz (WS) モデル³⁾ において, つなぎ変え確率 p を変えて平均最短経路長 $L(p)$ とクラスター係数 $C(p)$ を計算することにより, スモールワールド性が現れる p の範囲を確認する. その結果が図 1 である. 図 1 より, およそ $0.001 \lesssim p \lesssim 0.1$

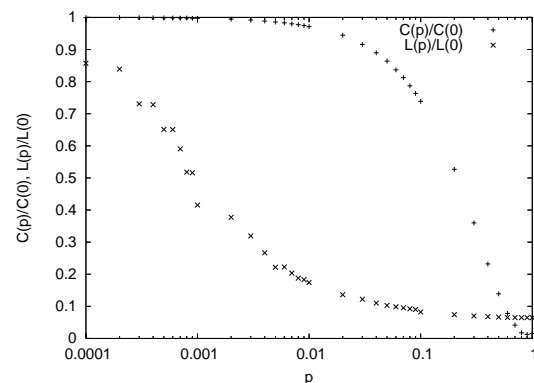


図 1: 平均最短経路長 $L(p)$ とクラスター係数 $C(p)$. それぞれの p の値において確率的に生成された 20 個のネットワークについて平均をとったものであり, それぞれ $p = 0$ のときの値 $L(0), C(0)$ で割って規格化している.

の辺りで小さい L と大きい C の値が同時に実現され, スモールワールドになっていることがわかる.

次に固有値 ν の頻度分布 $P(\nu)$ を表したのが図 2 である. 図 2 から, $p = 0, 0.001, 0.01$ の場合はいずれも $\nu \simeq 0$ 付近に複数の鋭いピークをもっており, p

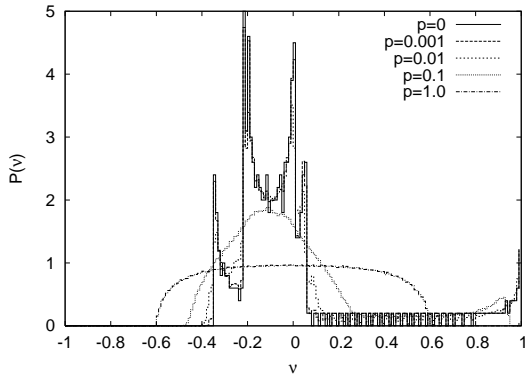


図 2: p を変えたときの固有値 ν の頻度分布 $P(\nu)$. p の値に対し 100 個のネットワークを生成し平均している .

の増大に伴ってそれらのピークの位置は変わらずにピークの高さが低くなっている . また $p = 0.1, 1.0$ の場合は $\nu \simeq 0$ 付近の鋭いピークは現れず , 鈍い単峰の分布となっている . このことから , 固有値分布に関しては格子・スモールワールドの相とランダムネットワークの相の 2 相に大別されることがわかる .

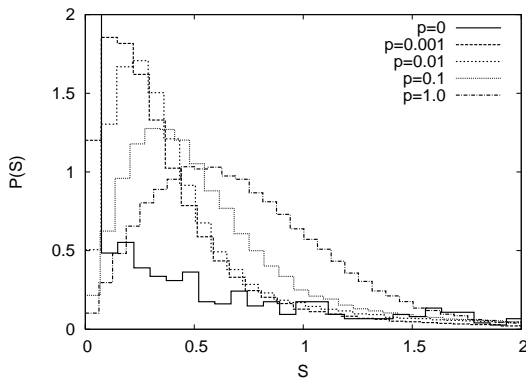


図 3: p を変えたときの最近接固有値間隔分布 $P(S)$. 図 2 と同様に p の値に対し 100 個のネットワークを生成し平均している .

次に最近接固有値間隔 $\Delta\nu$ の頻度分布を調べる . サイズ依存性を除くため各 p における平均間隔で規格化し , $S \equiv \Delta\nu/\overline{\Delta\nu}(p)$ とする . 図 3 を見ると p が大きくなるにつれて分布は Poisson 分布から Wigner 分布へ変化していることがわかる . これはネットワークラプラシアン固有値間隔分布に関する先行

研究の結果⁴⁾ と合致している . また p が大きくなると分布は $S \gg 1$ に離れたピークをもつよう変化する . この離れたピークについて調べたところ , それが $\Delta\nu_{1,2}$ であることがわかった . そこで $\Delta\nu_{1,2}$ の p に対する変化を表したのが図 4 であり , おおよそスモールワールド性を示す p の範囲において

$$\Delta\nu_{1,2} \propto p^{1.13} \quad (1)$$

という関係があることがわかる . 各ノードにおける滞在確率の時間相関関数の特徴時間は $(\Delta\nu_{1,2})^{-1}$ である . ところで WS モデル上での拡散現象の特徴時間は , スモールワールド領域においてはショートカット端点への平均初到達時間であり , ショートカット本数の逆数 $(pkN)^{-1}$ に比例する⁵⁾ . この 2 つの特徴時間をつなぐのが式 (1) である .

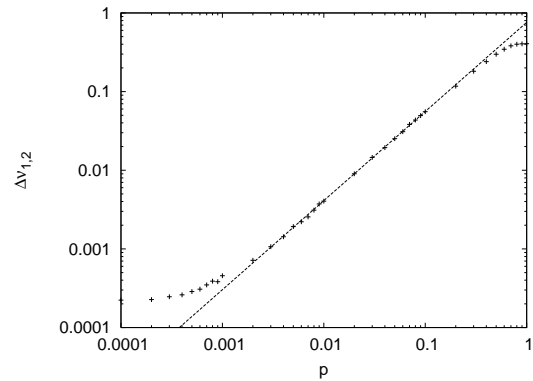


図 4: p に対する $\Delta\nu_{1,2}$ の変化 . 直線は $0.76 \times p^{1.13}$ を表す .

参考文献

- 1) S. N. Dorogovtsev, et al, *Phys. Rev. E* **68**, 046109 (2003).
- 2) R. Monasson, *Eur. Phys. Jour. B* **12**, 555-567 (1999).
- 3) D. J. Watts and S. H. Strogatz, *Nature* **393**, 440-442 (1998).
- 4) S. Jalan and J. N. Bandyopadhyay, *Physica A* **387**, 667-674 (2008).
- 5) M. E. J. Newman and D. J. Watts, *Phys. Rev. E* **60**, 7332 (1999).