

# The Mode Analysis in Turing Type Reaction-Diffusion System under Spatiotemporal Forcing

昌子浩登 (Hiroto Shoji)

1. 京都府立医大, 2. PREST. 1. 京都市北区大將軍西鷹司町 13, shoji@koto.kpu-m.ac.jp  
Kyoto Prefectural University of Medicine, Nishi-takatukasa 13, 603-8334

## 概要

We study the time-evolutional behavior of self-organized Turing pattern under spatiotemporal forcing in one-dimensional systems. Based on the model equations, we apply a space-time dependent external force. Entrainment and modulation of time-evolutional patterns are investigated numerically in one dimension. We develop a theoretical analysis to understand the obtained dynamics. Moreover, we discuss the relationship between the behavior of time-evolutional patterns in Turing system with external force and the mode selection problem that is the fundamental unsolved problem in non-equilibrium open systems.

## Keywords

Turing Pattern, Mode Selection.

## 1 はじめに

1952年チューリング [1] は、通常場を一様にする作用をもつ拡散が、2成分以上系の反応系とカップルすると、自発的な周期パターンが形成されうること示し、生物のパターン形成にこのメカニズムが使われているのではないかと示唆した。以来、生物のさまざまな形作り現象の説明にこのシステムが適用されてきた [2]。しかし、この系で形成される周期パターンの波数選択の問題は未ださまざまな議論が行われている [2, 4, 5]。本稿では、外場を用いて得られる周期の波数の性質を考察することから、このモード選択の問題に対しての発見的なアプローチを取り組んでみる。

## 2 モデル方程式

反応物質  $A, B$  と生成物  $D, E$ , 中間物質  $U, V$  で構成される仮想的反応系のブラッセレータ [3]  $A \xrightarrow{\gamma_1} U$ ,  $2U + V \xrightarrow{\gamma_2} 3U$ ,  $B + U \xrightarrow{\gamma_3} V + D$ ,  $U \xrightarrow{\gamma_4} E$  を考える。ただし、 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  はそれぞれの反応レートとする。この反応において、 $U, V$  が拡散物質で、最初の反応 ( $A \xrightarrow{\gamma_1} U$ ) に周期的な仮想外場を導入したモデル

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \nabla^2 u + A - (B+1)u + u^2 v + \epsilon \cos(q_f x - \Omega t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \nabla^2 v + Bu - u^2 v, \quad (2)$$

を考える。ただし、 $u$  と  $v$  は  $U, V$  の濃度を表し、 $D_u$  と  $D_v$  はそれぞれの拡散係数とする。外場の影響がなく ( $\epsilon=0$ )、拡散項の影響を考えないとき式 (1), (2) は平衡点  $(\bar{u}, \bar{v}) = (A, B/A)$  をもつ。この外場は  $\Omega/q_f$  の速度で右側にトラベリングする正弦波分布である。例えば、仮想的な化学反応の反応レート  $\gamma_1$  が外場光の影響を受ける。そして、このライトは  $\Omega/q_f$  で動く周期的に穴の開けられたスリットになっているような状況を考えている。

## 3 数値計算

式 (1), (2) の数値シミュレーションを行った。システムサイズ  $L = 80\pi$  の空間上を 4096 格子 ( $\delta x = 80\pi/4096$ ) に区切った一次元空間上で、パラメータ  $B$  に対して、外場の周期  $q_f$  と外場の強さ  $\epsilon$  を変えたときの数値計算を行い、得られるパターンの特徴を考察した。その他のパラメータは、 $D_u = 1.0$ ,  $D_v = 8.0$ ,  $A = 4.5$  で固定し、外場の影響がないと

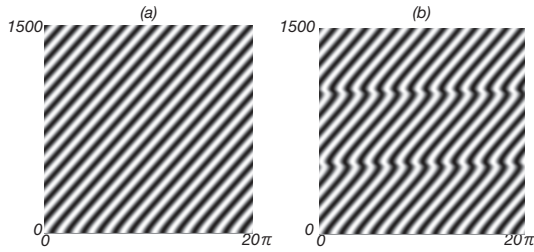


図 1: (a)  $\epsilon = 0.1450$  と (b)  $\epsilon = 0.1430$  のときの  $u(x, t)$  の時間 (y 軸)-空間 (x 軸) プロット。パラメータは本文参照。ただし、見やすさのため  $1/4$  領域 ( $20\pi$ ) の空間での振舞いを示す。

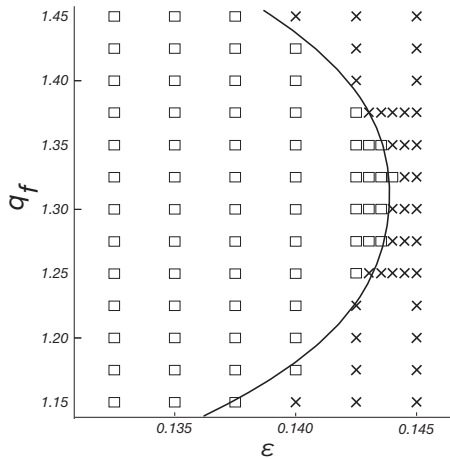


図 2:  $q_f$ - $\epsilon$  を変化させたときに得られる  $u$  の振舞いの相図。× (□) は、図 1(a) (図 1(b)) の振舞いに対応。

きは、チューリング不安定性により静止した周期パターンが自発的に生成されるパラメータ ( $B > 6.78$ ) を選ぶ。初期分布は、 $(\bar{u}, \bar{v}) = (A, B/A)$  に微小摂動を与えた分布を使い、境界は周期条件を課した。

図 1 は、特徴的な 2 タイプの  $u$  の時空間パターンを濃度プロットで示したものである。外場の影響が強いとき、図 1(a) のように、外場に完全に引き込まれ、外場の速度  $\Omega/q_f$  で分布が進んでいく。外場の影響が少し弱いと、外場の影響により分布が速度  $\Omega/q_f$  で分布が右に進んで行くなか、チューリングシステムの由来の分布を静止させようという働きにより、時間周期的にパターンを戻そうとする変動が生じる。(図 1(b))

図 2 は分布の振る舞いを分けた相図である。 $q_f = 1.325$  で  $\epsilon$  の極大を持つ。図 2 の太線は、シノソイダルな解を代入し、位相と振幅の方程式に書き下し、位相の振る舞いの解析から得られる相転移点を表す。

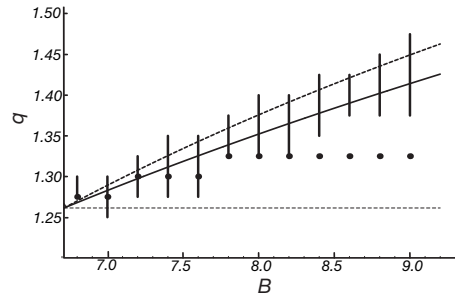


図 3:  $B$  を変化させたとき得られた波数を比較。縦棒は外場がないときに得られる数値計算で得られる波数の幅、黒丸は数値計算で得られた極大値をもつ波数  $q_f$ 。太曲線は、理論計算で得られた極大を持つ波数を表す。また、細かい波線は、臨界波数を表し、太い波線は成長速度最大の波数を表す。

図 3 は、得られた波数を比較したものである。つまり、 $B$  を変化させていったとき (i) 極大をとる波数を数値的に求めたもの (黒丸)、(ii) 解析的に得られる極大の波数 (太曲線)、そして (iii) 外場がないとき、初期分布の乱数の種を 10 セット変えたとき得られた波数の範囲 (縦棒) である。図より、(i) と (iii) が  $6.8 < B < 8.2$  で合致している。また図より、(ii) と (iii) とはこの範囲では完全に一致していることがわかる。

このように外場を導入したときの極大をとる波数を解析することから、自発的パターンの波数比較を議論する。

## 参考文献

- [1] AM. Turing, R. Soc. Lond. B237, 37, 1952.
- [2] J.D. Murray, *Mathematical Biology*, 1993.
- [3] M. Kuwamura & E. Yanagida, *PhysicaD* 175, 185, 2003.
- [4] H. Tokuda & T. Ohta PRE 72, 46216, 2006.
- [5] G. Nicolis & I. Prigogine, Wiley 1977.