

曲面スピン模型の臨界現象

Critical behavior of spin lattice models on curved surfaces

島 弘幸

Hiroyuki Shima

北海道大学大学院工学研究科応用物理学専攻

札幌市北区北 13 条西 8 丁目 (shima@eng.hokudai.ac.jp)

Department of Applied Physics, Graduate School of Engineering,
Hokkaido University, Sapporo 060-8628 Japan

概要

We investigate the critical behaviour of two-dimensional spin lattice models (Ising and XY models) embedded on a curved surface with a constant negative curvature. Finite-size scaling analysis for the Ising model reveals that values of critical exponents deviate from those for planar counterparts. Furthermore, negative curvature of the embedding surface gives rise to frustration in local spin configuration in the XY model, which results in a zero-temperature glass transition and non-equilibrium phase transition at finite temperature. These findings evidence that the underlying geometric character is responsible for the critical properties of spin lattice models.

Keywords

Critical phenomena, Spin lattice model, Phase transition, Curved surface, Geometric effect

1 はじめに

本講演では、曲がった空間で起こる特異な相転移現象 — 特に 2 次元「双曲平面」上の相転移について、著者らが得た最近の研究成果を発表する。双曲平面とは、面上のあらゆる点が負一定値の曲率を示す「曲面」である。この曲面内に閉じ込められた物

理系が何らかの相転移現象を示す場合、その転移点近傍では曲面の幾何対称性を反映した様々な特異性が観測される。本研究では、特に格子スピン模型の典型例である Ising 模型と XY 模型に焦点を絞り、その磁気相転移で顕在化する幾何曲率効果の解明を行った。講演ではこれらの解析結果に加え、相転移現象一般を記述するための数理的手法についても概観する。

2 研究背景と動機

本研究の元々の動機は、ナノサイエンス分野における目覚ましい技術発展に端を発する。当分野における微細加工技術の進展に伴い、系の幾何形状とその物理特性が直接的にリンクするナノ構造体 ($10^{-8} - 10^{-9}$ m サイズの大きさの構造体) が数多く合成されてきた。これら複雑な構造を有するナノスケール物質の表面上で系の微視的要素 (電子やスピンなど) が相互作用を及ぼし合う場合、その多体系の運動状態は平らな空間の場合とは著しく異なることが予想される。特に曲率の効果が顕著となる低エネルギー領域においては、平らな空間では実現不可能な特異な秩序相や励起状態が発現する可能性がある。このようなナノ表面物性における幾何形状効果を定量的に記述することが出来れば、その成果はナノ構造体の形状変化をベースとした新規なデバイス開発に発展する可能性がある。

上記の背景のもと講演者は、ナノ構造体の凹凸表面に発現する多体相関係の相転移現象について、系

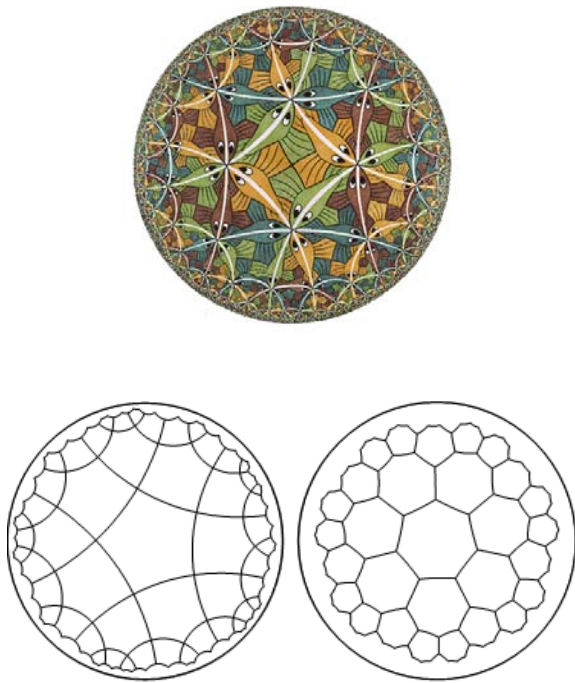


図 1: 上: “Circle Limit III” by M.C.Escher (1959) (www.mcescher.com/Gallery/gallery.html1 より転載)。下: 双曲平面上に作られた正五角形・正七角形格子の Poincaré disk 表示。

の幾何学的形状がその臨界特性に与える効果を明らかにすると、の着想に至った。具体的に考察する系としては、2次元ナノ曲面上に定義された格子スピン模型を取り上げ、転移温度近くにおける熱力学量の特異性、臨界指数の解析、および臨界緩和の数値シミュレーションを行った。

3 計算手法・結果

本研究で扱った双曲平面格子を図 1 に示す。これは無限に広がる双曲平面を単位円内部に射影した Poincaré 表示であり、円周上の点が無限遠に相当する。各多角形が歪んでいるのは、ちょうど世界地図の北極・南極周辺が歪んで見えるのと同じ理由である。よって実際に曲面上に並んでいる多角形は全て「正」多角形である。双曲平面の特徴である「負一定値のガウス曲率」の存在が、平面では実現不可能な正五角形・正七角形によるタイリングを可能にしている。

このような格子に Ising 模型・XY 模型を定義し、その各熱力学量(自発磁化 $m(T)$ ・磁化率 $\chi(T)$ など)をモンテカルロ法により解析した。その結果 Ising 模型については、全ての臨界指数が平面 Ising 格子の厳密解と異なる値をとることがわかった [1, 2]。これは、平面・曲面それぞれに定義された二つの Ising 模型が異なる普遍クラスに属することを意味する。

次に XY 模型について解析したところ、系が平衡に達するまでの緩和時間が低温域で急速に増大する現象が確認された。そこで系のスピングラス感受率を計算した結果、この緩和時間の増大は準安定状態にトラップされるいわゆる dynamical transition を示すものであることがわかった [3]。さらにスピングラス感受率の系サイズ依存性を調べたところ、この系は絶対零度においてガラス転移を示すという結果が得られた。

上に述べた Ising 模型・XY 模型の両者に関する結果は全て、模型の舞台である曲面の幾何学的曲率が系の臨界特性を本質的に変えることを意味するものである。さらに双曲平面では、パーコレーション現象や量子拡散現象においても幾何効果が顕著に現れることが最近の研究で明らかとなった。講演ではこれら一連の成果を合わせて概観する。

謝辞

この研究発表は、文部科学省の科学研究補助費(若手 B) および北海道大学公募型プロジェクト – 若手研究者自立支援助成の支援を受けている。また本成果の一部は、韓国・成均館大学の B.J.Kim 教授およびスウェーデン・Umea 大学の S.K.Baek 博士との共同研究によるものである。

参考文献

- [1] H. Shima and Y. Sakaniwa, J. Phys. A **39**, 4921 (2006). [Selected Paper by IOP]
- [2] H. Shima and Y. Sakaniwa, J. Stat. Mech. P08017 (2006).
- [3] S. K. Baek, H. Shima and B. J. Kim (2008) *submitted*.