

1次元乱流における時間相関関数とパワースペクトル

Time correlation functions and the corresponding power spectra in one-dimensional turbulence

岡村 誠, 森 肇

Makoto Okamura, Hazime Mori

九大応力研, 〒 816-8580 春日市春日公園 6 - 1, okamura@riam.kyushu-u.ac.jp
RIAM Kyushu University, Kasuga 816-8580

概要

The time evolution equation of the time correlation function $U_n(t)$ includes the memory function $\Gamma_n(t)$ in the projection operator formalism in one dimensional turbulence. We can evaluate the asymptotic forms of $U_n(t)$ and the corresponding power spectra $I_n(\omega)$ analytically under an assumption of a similarity relation between $U_n(t)$ and $\Gamma_n(t)$. Main findings are as follows. The time correlation function $U_n(t)$ becomes the Lorentzian form $1/(1+t^2)$ for $t \rightarrow 0$ and is classified into three decay forms: the exponential e^{-t} , the oscillatory exponential $e^{-t} \cos t$, and the oscillatory power series $t^{-3/2} \cos t$, for $t \rightarrow \infty$ with respect to k_n . All the corresponding power spectra $I_n(\omega)$ become Lorentzian $1/(1+\omega^2)$ for $\omega \rightarrow 0$ and decay exponentially for $\omega \rightarrow \infty$.

Keywords

Time correlation function, Power spectrum, One-dimensional turbulence, Closure

1 はじめに

時間相関関数はカオス・乱流の統計的性質を示す量の一つとして,しばしば使われる.そして,その

形は

$$U_n(t) \propto \begin{cases} \exp[-(\hat{\gamma}_n t)^2] & \text{for } t \rightarrow 0 \\ \exp(-\bar{\gamma}_n t) & \text{for } t \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1)$$

であると一般的に思われているようである [1]. 対応するパワースペクトルは

$$I_n(\omega) \propto \begin{cases} \frac{\bar{\gamma}_n}{\omega^2 + \bar{\gamma}_n^2} & \text{for } \omega \rightarrow 0 \\ \exp[-\omega^2/(4\hat{\gamma}_n)^2] & \text{for } \omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2)$$

となる.ここでは,1次元乱流において,時間相関関数とパワースペクトルの漸近形を解析的に導き,(1),(2)の漸近形が妥当であるか調べるために,代表的な1次元乱流である蔵本・シバシンスキー方程式による数値結果と比較する.さらに,漸近形だけでなく,時間相関関数の全体の形についてモデル解と数値解を比較する.

2 相関関数とパワースペクトル

1次元一様定常乱流に射影演算子法を適用すると,時間相関関数 $U_n(t) := \langle \hat{u}_n(t) \hat{u}_n^*(0) \rangle$ の時間発展方程式は

$$\frac{dU_n(t)}{dt} = - \int_0^t \Gamma_n(s) U_n(t-s) ds \quad (3)$$

となる.ここで, $\hat{u}_n(t)$ は $u(x,t)$ のフーリエ変換

$$\hat{u}_n(t) := \int_0^L u(x,t) e^{-ik_n x} dx, \quad k_n := \frac{2n\pi}{L}$$

で, L は周期である. さらに, 時間相関関数 $U_n(t)$ の特性時間 $\tau_n^{(u)}$ と記憶関数 $\Gamma_n(t)$ の特性時間 $\tau_n^{(\gamma)}$ を

$$\tau_n^{(u)} := \int_0^\infty \frac{U_n(t)}{U_n(0)} dt, \quad \tau_n^{(\gamma)} := \int_0^\infty \frac{\Gamma_n(t)}{\Gamma_n(0)} dt,$$

と定義して, 両特性時間の比を

$$\tilde{\tau}_n := \tau_n^{(\gamma)} / \tau_n^{(u)}, \quad 0 < \tilde{\tau}_n \leq 1$$

とする.

2.1 $T \ll 1$

時間相関関数 $U_n(t)$ の時間を特性時間 $\tau_n^{(u)}$ で, 記憶関数 $\Gamma_n(t)$ の時間を特性時間 $\tau_n^{(\gamma)}$ でスケールングして, それぞれの関数を規格化すると, 両者は $T \ll 1$ では同じ関数形 $Q_n(T)$ になると仮定する.

$$Q_n(T) := \frac{U_n(T\tau_n^{(u)})}{U_n(0)} \approx \frac{\Gamma_n(T\tau_n^{(\gamma)})}{\Gamma_n(0)}, \quad T \ll 1 \quad (4)$$

(4) を (3) に代入した式を $T \ll \tilde{\tau}_n$ で評価すると

$$\frac{dQ_n(T)}{dT} \approx -\frac{[Q_n(T)]^2 T}{\tilde{\tau}_n} \quad (5)$$

と近似できる. (5) を $Q_n(0) = 1$ のもとで解くと,

$$Q_n(T) = \frac{2\tilde{\tau}_n}{T^2 + 2\tilde{\tau}_n} \quad \text{for } T \ll \tilde{\tau}_n$$

となる. 対応するパワースペクトルは,

$$I_n(\Omega) = \sqrt{\frac{\tilde{\tau}_n}{2}} \exp\left(-\sqrt{2\tilde{\tau}_n}\Omega\right) \quad \text{for } 1 \ll \Omega\tilde{\tau}_n \quad (6)$$

となる.

2.2 $\Omega \ll 1$

時間相関関数 $U_n(t)$ と記憶関数 $\Gamma_n(t)$ のフーリエ・ラプラス変換した $\hat{U}_n(\omega)$ と $\hat{\Gamma}_n(\omega)$ の振動数をそれぞれの特性時間 $\tau_n^{(u)}$, $\tau_n^{(\gamma)}$ でスケールングして, それぞれの関数を規格化すると, 両者は $\Omega \ll 1$ では同じ関数形 $R_n(\Omega)$ になると仮定する. そうすると (3) のフーリエ・ラプラス変換は

$$R_n(\Omega)R_n(\Omega\tilde{\tau}_n) + i\Omega R_n(\Omega) - 1 = 0, \quad \Omega \ll 1$$

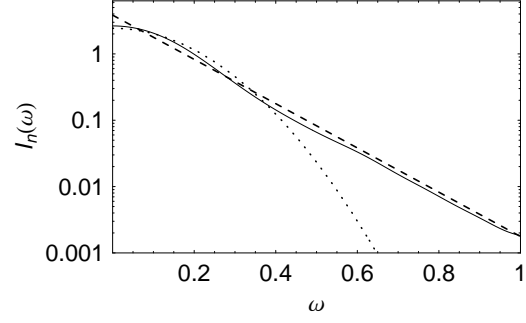


図 1: 実線は漸近解 (6), 破線は KS 方程式の数値計算結果. $\tilde{\tau}_n = 0.44$ ($k_n = 0.69$).

となる. $R_n(\Omega)$ の関数形をパデ近似型に仮定すると, その逆変換である規格化された時間相関関数 $Q_n(T)$ の $T \rightarrow \infty$ の漸近形は以下のように分類される.

$$Q_n(T) = \begin{cases} A_n^{(-)} e^{-\beta_n^{(-)} T} & 0 < \tilde{\tau}_n \leq 0.37 \\ A_n e^{-\beta_n T} \cos(\alpha_n T + \theta_n) & 0.37 < \tilde{\tau}_n \leq 0.84 \\ - & 0.84 < \tilde{\tau}_n < 1 \\ \frac{T^{-3/2}}{\sqrt{\pi}} \cos\left(2T - \frac{3\pi}{4}\right) & \tilde{\tau}_n = 1 \end{cases}$$

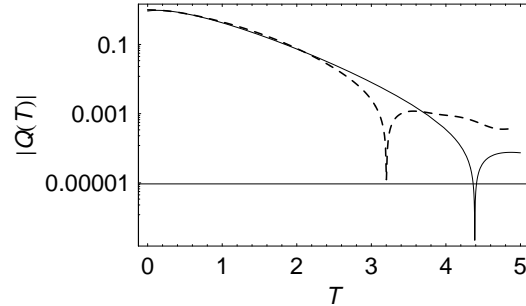


図 2: 実線は漸近解, 破線は KS 方程式の数値計算結果の $|Q(T)|$. $\tilde{\tau}_n = 0.44$ ($k_n = 0.69$).

参考文献

- [1] R. Kubo, M. Toda, and N. Hashitsume. *Statistical physics II, Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.