三題噺[1]『朝永先生の手作業シミュレーション（Ehrenfest の壷）・高次元立方体関数・回転演算子の有理数表示と単位ベクトル表示』

小川　泰

NPO 科学芸術学際研究所 ISTA, 351-0036 埼玉県朝霞市北原 2-5-28　鈴木第二ビル 211 号

E-mail: ogawa-t@koalanet.ne.jp

Handmade simulation by Prof. Tomonaga, a Nobel Prize winner, High Dimensional Spherical Functions and Rational Representation and unit vector representation of Rotation operators

Tohru OGAWA

NPO-Interdisciplinary Institute of Science, Technology, and Art (ISTA)

2-5-28-211 Kitahara, asaka-shi, Saitama 351-0036, Japan

Key Words: Ehrenfest Process, high dimensional spherical functions, Rational Representation and unit vector representation of Rotation operators

§１　ことのおこり

朝永振一郎先生(1906～1979)の最後の著書『物理学とは何だろうか』[1]の最終章「20 世紀への入口」約 6600 字は，「1977 年 11 月 22 日，病床にて口述」でとぎれている．その直前 5500 字の「物理学生のための補足」にある図（右図の左上：原著（下）136 頁）作成の生データの一部が右図の左下と右のものである．

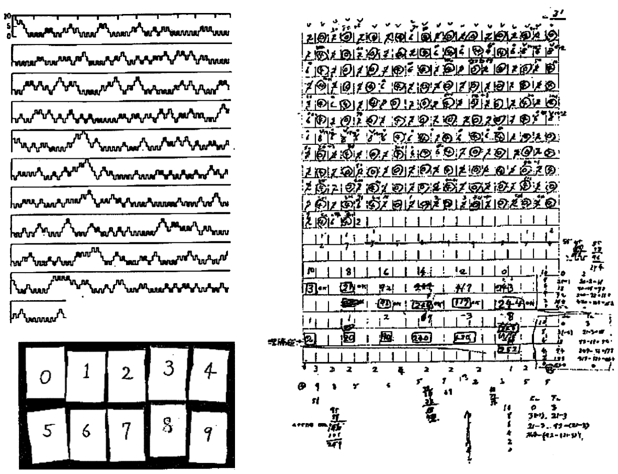

図１　原資料（筑波大学朝永記念室所蔵）

1984 年，筑波大学に保存されている遺品資料から，これらの作業過程を解読する機会に，私は恵まれた，

過去と未来の交換に対して不変な可逆素過程からでも，不可逆性が導けるか？　という謎に対して， Boltzmann は統計的見方を導入し，「H関数は圧倒的確かさで時間的に減少する」というH定理を示した．Ehrenfest 夫妻がH関数の時間的挙動を調べようとしたモデルが「Ehrenfest の壷の実験」である．①番号付きの玉N個を二つの壷 A と B に入れ，②平等な確率で番号を一つ選び，③当選した玉を今入っている壷から他方に移動する．④この操作を繰り返し，A と B にある玉の個数差の絶対値の変動を図示する．これがH曲線に相当する．力学の持つ可逆性・回帰性に似た性質を持ちながら，「定義域の端の$\Lambda = 0$の場合を除いてΛは殆ど確実に減少する」という意味でH曲線になぞらえられる．（文献 [1]～[3]）

朝永先生は$N = 10$の場合についてH曲線を描くべく手作業されたわけである．

---

[1] 与えられた３題で即座に落語にまとめて演じるのが本義，ここでは自選３題で且つ即席ではないが，常識的には関連がみえにくい３題なので，拡張使用．

§２　私の解釈

それに対する私の解釈は，各壷毎の個数だけに注目するのではではなく，何番の玉がどちらにあるのかに着目する立場で考えると事情は次のようになる．全系の状態は，N次元の立方体の頂点のいずれかに相当する．玉１個の移動はこの超立方体のある頂点から隣頂点に辺に沿う移動に対応する．つまり高次元超立方体状の random walk と見なしてよい．２壷間の個数差は，この超立方体の１対角線への射影だけで記述することに対応する．それはそうとして，この random walk を完全に解くことは可能か？　実際に，N 次元超立方体の頂点数 2^N に等しい状態数で，辺に沿う random walk の遷移行列を書き, その固有値, 固有ベクトルを調べることは, さほど困難ではない．この問題の高度な対称性に着目するならば，視野が開けるに違いないと決意し，実行してみた．先ず朝永シミュレーションに対応する $N=10$ を完全に解き，任意の N に対しても見通しが立った．

顕著な結果は,「①固有値が等間隔に並ぶこと，②その縮重度が２項分布的になっていること」である．固有値が等間隔に並ぶことからすぐ思い浮かぶことは，スピン演算子あるいは各運動量演算子との類似点である．また，この①と②は中央値近傍では正規分布に接近することである．

この数理科学掲載の文では，落語好きの朝永先生にちなんで「スピンはめぐる」[4]とオチで結ぶという邪念が起こり，難しい数式をそのあたりに入れてしまった．洒脱な朝永先生の不肖の弟子として，未熟な修行ぶりを恥じる．

§３　回転演算子の単位ベクトル表示

３次元での球対称な問題に対して，(動径変数の他）角度を変数とした球面調和関数や球調和関数が使われる．３次元極座標は，球に対して当然とはいうものの，(いわば）地軸を導入して，異方性が導入されているのが気になる．単位ベクトル r を方向変数として，その変数や定数も，できるだけベクトルで表示する方式を工夫してみた．この仕事も既発表であるが，前節の議論との発想上のつながりは絶って表現したので，ここで脈絡をつけておきたい．結晶のような周期性で構成粒子の環境が低下する場合などの (実用的な) 群論の教育を殆ど受ける機会がなかったため，この三題噺の流れで自己流に考察した結果，対称性が球的から周期的あるいは準周期的なもの等に退化した場合も，一貫した見解を持てるようになった．既発表文献[5~8]を挙げておく．

文献

[1]　朝永振一郎『物理学とは何だろうか』(岩波新書　黄 85，86．1979 ;「朝永振一郎著作集 7, みすず書房,1982」

[2]　P. and T. Ehrenfest::Phys. Z. **8**, 311 (1907)
P. and T. Ehrenfest::Encyclop. D. math. Wissensch. IV 2, 11 (1911).

[3]　テル・ハール「熱統計学Ｉ」田中友安・池田和義訳　（みすず書房，1960）

[4]　朝永振一郎『スピンはめぐる』(中央公論社, 1974)，同新版 ;（みすず書房，2008）

[5]　小川泰 :「朝永先生の手作業シミュレーション」（数理科学，1985 年１月『？と！』 20~26）

[6]　小川泰「準結晶に絡む二三の数理」（科研費報告書「形態形成の科学的研究（Ⅱ）」高木隆司編，昭和 62 年度）p.107～125 のうちⅢ(p.119~125)　(1988)

[7]　The Ehrenfest Process, a Rational Representation of Spin Operators and Explicit Form of Rotation Operators” in “Quasicrystals” Eds. T. Fujiwara and T. Ogawa (1990, Springer)

[8]　T. Ogawa; Forma 13 (2), 51-62 (1998)