線形フィードバックを用いた結合関数の制御

加納剛史　木下修一
阪大院生命機能　大阪府吹田市山田丘 1-3
takesik@fbs.osaka-u.ac.jp

Control of coupling function using linear feedback

Takeshi Kano, Shuichi Kinoshita
Graduate School of Frontier Biosciences, Osaka University
1-3 Yamadaoka, Suita, Osaka

Abstract: Methods to control the dynamics of coupled oscillators have been developed owing to various demands. In this study, we develop a method to control coupled oscillators, in which the coupling function expressed in a phase model is regulated by the multi-linear feedback. The present method has wide applicability because we do not need to measure an individual output from each oscillator, but only measure the sum of the outputs from all the oscillators.
Keywords: coupled oscillators, phase model, coupling function, feedback control

１．はじめに

自発的にリズムを刻む振動子がその相互作用によってリズムを揃える同期現象は、自然界に広く知られた現象である。同期現象は、心筋細胞の収縮リズムの同期のように我々の生命維持に不可欠な機能を果たすこともあれば、パーキンソン病患者の手の震えのように望ましくない機能を果たしてしまうこともある。そこで、より良い機能を得るために同期の振舞いを人為的に制御しようという試みが近年為されている。例えば、パーキンソン病患者の脳内への電気刺激によって同期を崩す治療（deep brain stimulation）は手の震えの症状改善に効果的であることが報告されている。本研究では、線形フィードバックによって位相モデルにおける結合関数の関数形を任意に変化させることで同期の振舞いを制御する手法を提唱する[1]。この手法は以前に報告されている非線形フィードバック法[2]と異なり、各振動子からの出力を個別に測定できなくてもその総和さえ測定できればフィードバックが可能であるという利点を持つため、振動子の数が多い系の制御に極めて有用である。

２．位相モデルと結合関数

ほぼ同一の特性を持った振動子が大域的に弱い相互作用をしている時、振動子の振舞いは次のような位相モデルで記述できる。

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} q(\phi_i - \phi_j) \tag{1}$$

ここで、ε は結合強度、N は振動子数、ϕ_i, ω_i はそれぞれ i 番目の振動子の位相、固有角振動数である。$q(\cdots)$ は結合関数と呼ばれ、この関数形によって系の振舞いが特徴づけられることが知られている[2]。

３．結合関数の制御法

次のモデルを考える。

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_i) + \frac{\varepsilon_c}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{P}_c(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) + \frac{\varepsilon_f}{N}\sum_{m=1}^{2M+1}\Gamma_m \sum_{j=1}^{N} p(\mathbf{x}_j(t-\tau_m))\mathbf{r} \tag{2}$$

ここで、 $\mathbf{x}_i$ は i 番目の振動子の相空間上の点を表し、右辺第 1 項は個々の振動子の振動、第 2 項は振動子間の相互作用、第 3 項はフィードバック信号を表す。τ_m、Γ_m はフィードバック信号の時間遅れと信号強度を表わし、得たい結合関数を与える τ_m、Γ_m の値の組み合わせを見つけだすことが本手法の目標である。M は得たい結合関数の最高次のフーリエ次数で、フィードバック信号は $2M+1$ 個の信号の足し合わせで与える。 $p(\mathbf{x}(t))$ は振動子からの出力を表す関数である。個々の振動子からの出力 $p(\mathbf{x}_j(t))$ がわからなくても全体からの出力の合計 $\sum_{j=1}^{N} p(\mathbf{x}_j(t-\tau_m))$ がわかるだけでフィードバック信号を与えることができることに注意されたい。(2)式を位相モデルで表わすと、

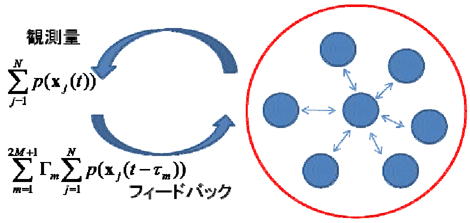

図 1　フィードバックの概要図

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \frac{\varepsilon_c}{N}\sum_{j=1}^{N} q_c(\phi_i(t) - \phi_j(t)) + \frac{\varepsilon_f}{N}\sum_{m=1}^{2M+1}\Gamma_m \sum_{j=1}^{N} q_f(\phi_i(t) - \phi_j(t-\tau_m)) \tag{3}$$

となる。ここで、 $q_c(\cdots)$、 $q_f(\cdots)$ はそれぞれもともとの振動子間の相互作用、フィードバックによる相互作用を表わす結合関数であり、その関数形は実験的に求めることができる。(3)式の右辺第 2 項、第 3 項の和が実効的に得たい結合関数で表わされればよいので、各結合関数をフーリエ級数に展開してそれぞれの次数について係数を比較することで τ_m、Γ_m の値を決定する。このようにして、得たい結合関数を得るためにどのようなフィードバック信号を与えれば良いかを求めることができる。

4．シミュレーション

Bonhoeffer-van der Pol モデルを用いてシミュレーションを行った結果を右図に示す。横軸に時刻、縦軸に各振動子と基準となる振動子との位相差を示している。目標とする結合関数は過去の理論[3]をもとに３－クラスター状態が安定となるように設定した。フィードバック信号を与えていない時は同位相で同期しているが、フィードバック信号を与えている間は位相が $2\pi/3$ ほどずれた３つのクラスターに分かれていることがわかる。このことから、フィードバックにより振舞いがよく制御されていることがわかる。

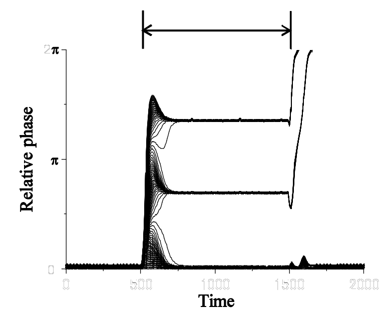

図 2　各振動子と基準振動子の位相差の時間発展。500<t<1500 の間フィードバック信号を与えている（両矢印）。

5．まとめ

位相モデルの結合関数の関数形をフィードバックにより制御することで同期現象を自由自在に制御する手法を導出し、その妥当性をシミュレーションにより確かめた。本手法は個々の振動子からの出力がわからなくても全体からの出力の合計がわかるだけで制御が可能であるという利点を持っており、振動子数の多い系にも用いることができるため、広い分野への応用が期待できる。

[参考文献]

[1] T. Kano and S. Kinoshita (in submission).

[2] H. Kori, C. G. Rusin, I. Z. Kiss, and J. L. Hudson, Chaos, **18**, 026111 (2008).

[3] K. Okuda, Physica D **63**, 424 (1993).