# 社会ネットワークに潜むクライシス構造

出尾美佳，宮崎修次

606-8501 京都市左京区吉田本町 京都大学情報学研究科 複雑系科学専攻
izuomika@acs.i.kyoto-u.ac.jp

## 概 要

新たなネットワーク解析手法の提案を目標として，ネットワークに大偏差統計理論を適用し，解析をおこなった．ネットワーク上の酔歩は，区分線形写像によって生成されるカオスに対応付ける事ができる．さらに，その時系列に大偏差統計解析を適用する事により，特性関数・重み付き平均・重み付き分散・揺らぎスペクトルなどを導くことができる．次に，mixi から適当なサイズの部分ネットワークを抽出し，解析をおこなった．その結果，重み付き平均の急峻な変化（$q$ 相転移）が見られた．相転移はカオス的なアトラクタの局所軌道拡大率のクライシス点近傍でも現れる．また，強調されたノード同士は密なリンクを持っていたことから，$q$ 相転移はクラスター構造が影響していると考えられる．さらに，小規模なネットワークモデルを用いて，$q$ 相転移とクラスター構造の関係，及び mixi ネットワークの特徴を考察する．

**Keywords**
大偏差統計, フロベニウスペロン演算子，SNS

グラフとネットワークの大偏差統計解析について述べる．まず，図１の単純なグラフは図２のマルコフ分割の区分線形カオス写像に相当する．区間 $I=[0,1)$ から $I$ への写像 $f$ は，$f(x)=x+1/2$ $(x\in I_1)$，$2x-1$ $(x\in I_2)$ となる．$I_1=[0,1/2)$，$I_2=[1/2,1)$．また，$f(I_1)=I_2$，$f(I_2)=I_1\cup I_2$ を満たしている．これはマルコフ分割の簡単な例となっている．区間 $I_1$ と $I_2$ はノード１とノード２に対応している．次数 $n$ のノードから隣接するノードへ移る確率は，等しく $1/n$ とする．次の遷移行列 $H$ が

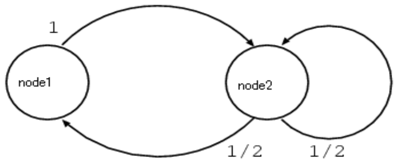


図 1: 簡単な有効グラフの例

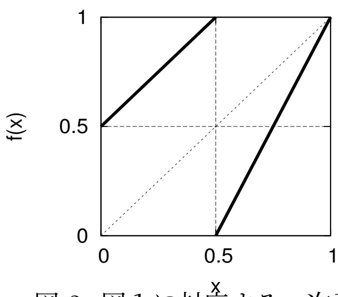


図 2: 図１に対応する一次元写像

得られる．$H=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1 & 1/2\end{pmatrix}$ ノードの特性量として，0 と 1 を定義する．ネットワーク上を酔歩すると，0 と 1 の時系列を得る．それは動的な量としてみなせ，局所平均 $u^T$ の変動は大偏差統計によって特徴付けられる．大偏差統計は以下の一般化された遷移行列 $H_q=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{1\cdot q} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{0\cdot q}\end{pmatrix}$ の最大固有値 $\nu(q)$ により決まる．重み付き平均 $u(q)$ と重み付き分散 $\chi(q)$ はそれぞれ，以下のようになる．$u(q)=\dfrac{d}{dq}\log\nu(q)$,　　$\chi(q)=\dfrac{d^2}{dq^2}\log\nu(q)$. 長時間平均は $u(0)$ に等しい．長時間平均と異なる局所平均の値は重み付けパラメータ $q$ の変化によって得られる．

次に SNS である *mixi* を解析した．特定のキーワードを１つ設定し，そのキーワードを含むノード

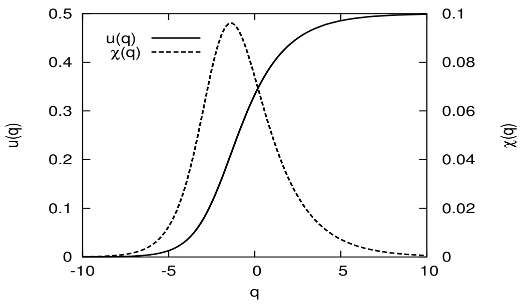


図 3: 簡単なネットワークの重み付き平均 $u(q)$ と重み付き分散 $\chi(q)$

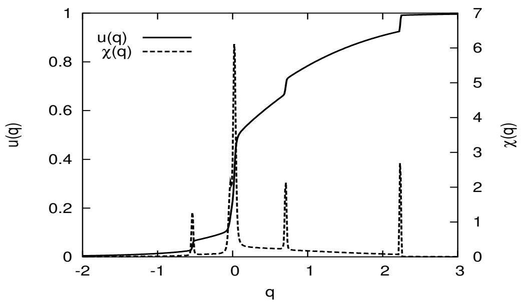


図 4: *Mixi* ネットワークの重み付き平均 $u(q)$ と重み付き分散 $\chi(q)$

は量１，含まないノードは量０として考える．酔歩によって得られる０と１の動的な量を考える．それは，キーワードに依るネットワーク上の動的な量の分布である．まず，*mixi* のあるユーザから距離２で切断した部分ネットワークを得る．図４はキーワードが *cooking* である *mixi* ネットワークの重み付き平均と重み付き分散である．重み付き平均 $u(q)$ は $q$ の値によって不連続に変化し，このような $q$-相転移が起こる．統計構造関数はこのように，ネットワーク構造とノード特性量の両方に影響する．

そして，このような $q$-相転移は一般化された遷移行列の対角ブロック構造によって，現象的に説明される．一般化された遷移行列を以下のようなブロック構造の行列で表現する．$H_q = (1-\epsilon)\tilde{H}_q + \epsilon J$ ,

$$\tilde{H}_q = \begin{pmatrix} H_B & 0 \\ 0 & H_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix},$$

$$H_B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix},$$

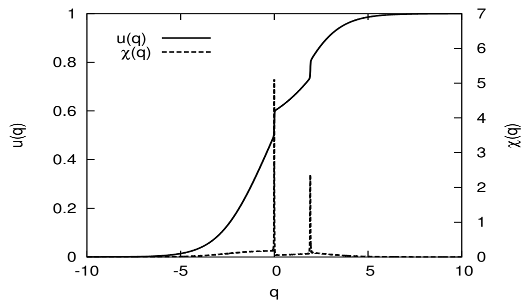


図 5: 遷移行列がブロック構造になっているネットワークの重み付き平均 $u(q)$ と重み付き分散 $\chi(q)$

$$W_1 = \begin{pmatrix} e^{1\cdot q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{1\cdot q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{0\cdot q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{0\cdot q} \end{pmatrix},$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} e^{1\cdot q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{0\cdot q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{1\cdot q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{0\cdot q} \end{pmatrix}.$$

すべての $i$ と $j$ に対して $J_{ij} = 1/8$．また，図５に重み付き平均と重み付き分散を描いた．重み付き平均は，ギブス測度に対応する平均である．

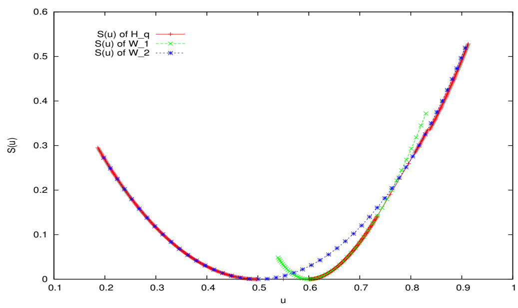


図 6: 遷移行列がブロック構造になっているネットワークの揺らぎスペクトル $S(u)$

# 参考文献

[1] K. Ejima, Thesis, Department of Applied Analysis and Complex Dynamical Systems, Kyoto Univ. (2008).

[2] S. Miyazaki, Forma **22**, 141 (2007) and references cited therein.